

Аффинные преобразования - 1

03 июля

От лат. *affinis* «смежный, родственный»

Опр. Пусть на плоскости дана пара неколлинеарных векторов OA и OB . Тогда любой вектор OC единственным образом представляется в виде $OC = x \cdot OA + y \cdot OB$. Пара вещественных чисел (x, y) называется координатами точки C относительно системы координат OAB .

Опр. Выберем на плоскости две системы координат OAB и $O'A'B'$. Каждой точке C сопоставим точку C' так, чтобы координаты C' относительно $O'A'B'$ совпадали с координатами C относительно OAB . Преобразования такого вида называются аффинными.

I. Проверьте, что для любого аффинного преобразования существует обратное, тоже аффинное; что композиция аффинных преобразований — снова аффинное.

II. Убедитесь, что следующие преобразования являются аффинными: параллельный перенос, поворот, осевая симметрия (и вообще любое движение); гомотетия, сжатие (растяжение) по оси ординат с некоторым коэффициентом.

III. Докажите основные свойства аффинного преобразования:

1. Биективно отображает плоскость в себя;
2. Равные друг другу вектора снова переводит в равные;
3. Сумму двух векторов переводит в сумму их образов;
4. Коллинеарные векторы переводит в коллинеарные и сохраняет их отношение;
5. Прямые переводит в прямые;
6. Параллельные прямые переводит в параллельные.

Без доказательства. В качестве равносильных определений аффинного преобразования достаточно взять набор свойств 2, 3, 4, либо всего лишь 1, 5.

1. Докажите, что существует аффинное преобразование, переводящее:

- (а) произвольный треугольник в правильный;
- (б) произвольный параллелограмм в квадрат;
- (в) произвольную трапецию в равнобедренную с таким же отношением оснований.

Загадка. Почему при помощи одной линейки нельзя опустить перпендикуляр? Начертить правильный треугольник? Провести биссектрису угла?

2. (а) Докажите, что в любой трапеции точка пересечения диагоналей, середины оснований и точка пересечения боковых сторон лежат на одной прямой.

(б) В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC через точку B проведена прямая, параллельная стороне CD и пересекающая диагональ AC в точке P , а через точку C — прямая, параллельная стороне AB и пересекающая диагональ BD в точке Q . Докажите, что прямая PQ параллельна основаниям трапеции, а точка пересечения BP и CQ лежит на прямой из предыдущего пункта.

3. Точки A_1, B_1, C_1 делят соответственно стороны BC, CA и AB треугольника ABC в одном и том же отношении. Докажите, что совпадают точки пересечения медиан треугольников $ABC, A_1B_1C_1$ и треугольника с вершинами в точках пересечения прямых AA_1, BB_1, CC_1 .

4. (а) Докажите, что неподвижные точки аффинного преобразования образуют либо всю плоскость, либо прямую, либо одноэлементное множество, либо пустое множество.

(б) Аффинное преобразование циклически меняет местами вершины треугольника т.е. переводит точку A в точку B , точку B в точку C , а точку C в точку A . Найти все неподвижные точки этого преобразования.

5. (а) Точки M и N — середины сторон BC и CD параллелограмма $ABCD$ соответственно. Отрезки AM и BN пересекаются в точке P . Найдите, в каких отношениях точка P делит эти отрезки.

(б) Дан параллелограмм $ABCD$. Произвольная прямая пересекает лучи AB, AC и AD соответственно в точках P, Q и R . Докажите, что

$$\frac{AB}{AP} + \frac{AD}{AR} = \frac{AC}{AQ}.$$

6. (а) Дан треугольник с тремя чевианами, пересекающимися в одной точке. Можно ли аффинным преобразованием перевести его в треугольник с медианами? С высотами? С биссектрисами?

(б) Докажите, что любой выпуклый четырёхугольник, отличный от трапеции, аффинным преобразованием можно перевести в четырёхугольник с парой противоположных прямых углов.

7. (Прямая Ньютона-Гаусса) Прямые, содержащие противоположные стороны четырёхугольника $ABCD$, пересекаются в точках K и L .

(а) Докажите, что середины отрезков AC, BD и KL лежат на одной прямой;

(б) Докажите, что точка пересечения прямых, соединяющих середины противоположных сторон четырёхугольника $ABCD$, лежит на той же прямой.

8. В параллелограмме $ABCD$ на сторонах AB и BC выбраны точки M и N соответственно так, что $AM = NC$, Q — точка пересечения отрезков AN и CM . Докажите, что DQ — биссектриса угла D .